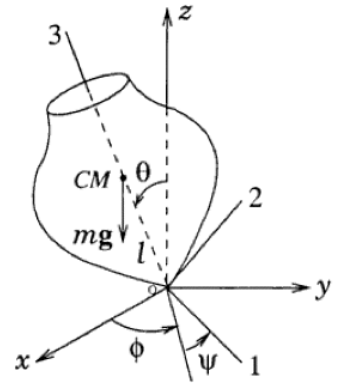


2-Pião Simétrico c/ pto fixo

Chamaremos de "pião simétrico" qq objeto com 2 momentos principais idênticos, $I_1 = I_2$ (eg., qq objeto com um eixo de simetria, mas tb. um cubo visto de um vértice)

Supomos que o ponto O está fixo num ref inercial, localizado a l do CM ao longo do eixo $\hat{x}'_3$, e que está submetido a um campo gravit. uniforme g . Sua orientação é determinada pelos 3 ângulos de Euler



Análise por formalismo lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [I_1(\dot{\omega}_1^2 + \dot{\omega}_2^2) + I_3\dot{\omega}_3^2] - mgl \cos \theta$$

eixos $(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow (x', y', z') \rightarrow$ compr. de $\vec{\omega}$ descritas pela eq. 3.4.30

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta \rightarrow \text{indep de } \phi, \psi$$

$$\therefore p_\psi = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 = \text{cte} \rightarrow \boxed{\omega_3 = \text{cte}}$$

$$p_\phi = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta = \text{cte}'$$

Ainda: como α n dep. de t explicitamente, V não depende de velocidades e também não há vínculos dep. do tempo, a integral de Jacobi h e' conservada e equivale à energia total

$$E = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \underbrace{\frac{1}{2} I_3 \omega_3^2}_{P_\psi^2 / I_3} + mgl \cos \theta = \text{cte''}$$

$\therefore$ temos portanto 3 constantes (p_ψ, p_θ e $E' = E - \frac{1}{2} \frac{P_\psi^2}{I_3}$), o que significa que podemos lidar com eqs. de 1ª ordem em ψ de 2ª em ϕ, θ, ψ

Soluções: isolando $\phi = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$ e substituindo:

$$\boxed{\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta}}_{V_{\text{ef}}(\theta)} + mgl \cos \theta = E'}$$

$\hookrightarrow V_{\text{ef}}(\theta)$

$\rightarrow$ eq p partícula 1D fictícia no potencial efetivo V_{ef}

essa eq. pode ser formalmente integrada por sep. de variáveis:

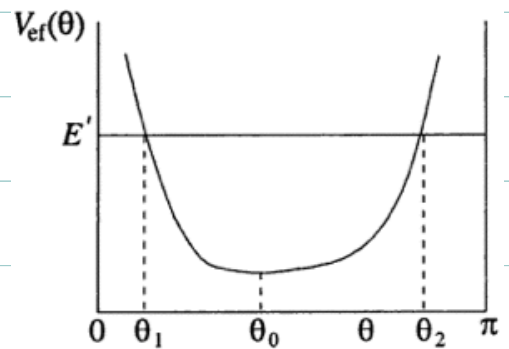
$$t = \pm \sqrt{\frac{I_1}{2}} \int_{\theta_0}^{\theta} [E' - V_{\text{ef}}(\theta)]^{-1/2} d\theta \quad (\text{se } \theta(0) < \theta_0)$$

Porém: integral não possui forma analítica geral simples (fica em termos de funções elípticas $\rightarrow$ melhor fazer análise qualitativa).

Análise qualitativa de $V_{ef}(\theta)$

Assumindo $|P_\psi| \neq |P_\phi|$, então

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} V_{ef} = \lim_{\theta \rightarrow \pi} V_{ef} = \infty$$



Def: $u \equiv \cos \theta$: $V_{ef}(u) = \frac{1}{2I_1} \frac{(P_\phi - u P_\psi)^2}{1-u^2} + mgl u$

$$\frac{dV_{ef}}{du} = 0 \leftrightarrow \frac{-P_\psi (P_\phi - u P_\psi)}{I_1 (1-u^2)} + \frac{1}{I_1} \frac{(P_\phi - u P_\psi)^2}{(1-u^2)^2} \cdot u + mgl = 0$$

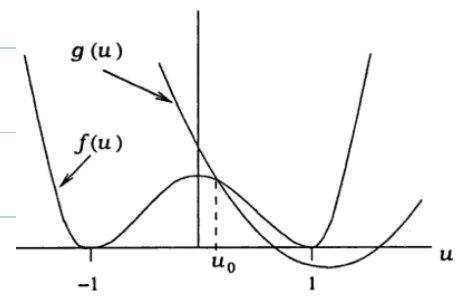
$$mgl I_1 (1-u^2)^2 = (P_\phi - u P_\psi) [P_\psi (1-u^2) - (P_\phi - u P_\psi) \cdot u]$$

$$\therefore mgl I_1 (1-u^2)^2 \equiv F(u) = g(u) = (P_\phi - u P_\psi) (P_\psi - u P_\phi)$$

pol. de 4ª ordem,

raízes em $u = \pm 1 \leftrightarrow \theta = 0, \pi$

pol. 2º grau
raízes $\frac{P_\psi}{P_\phi}$ e $\frac{P_\phi}{P_\psi}$



Por hipótese $\left| \frac{P_\psi}{P_\phi} \right| \neq 1$, então $g(u)$ só tem uma raiz no intervalo $(-1, 1)$

$\rightarrow$ só pode cruzar 1 vez com $F(u) \rightarrow V'_{ef}(\theta) = 0$ apenas em 1 pto $\theta_0 \in (0, \pi)$.

$\therefore V_{ef}$ tem a forma de um poço simples, e o sistema realiza oscilações periódicas ("nutation") entre ângulos extremos $\theta_1 \leq \theta_0 \leq \theta_2$ tais que

$$V_{ef}(\theta_1) = V_{ef}(\theta_2) = E'$$

Simultaneamente à nutação, o pião precessiona ao redor do eixo fixo $\hat{z}$, com velocidade angular

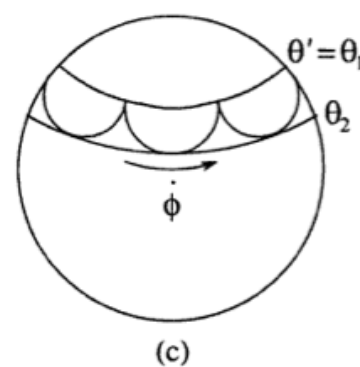
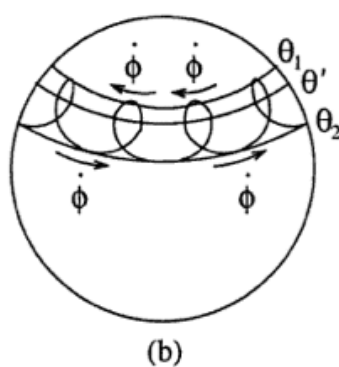
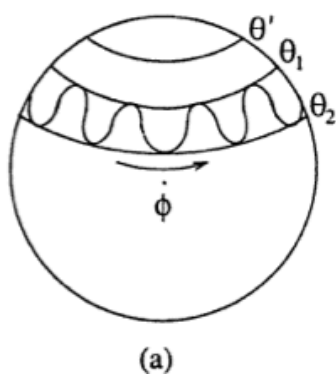
$$\dot{\phi} = p_{\psi} \cdot \frac{\left(\frac{p_{\phi}}{r_{\psi}}\right) - \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}$$

Qualitativamente há 3 tipos de mov:

- se $\left|\frac{p_{\phi}}{r_{\psi}}\right| > 1$, $\dot{\phi}$ tem sempre o mesmo sentido
- se $\left|\frac{p_{\phi}}{r_{\psi}}\right| < 1$, $\exists$ um ângulo θ' tal que $\cos\theta' = \frac{p_{\phi}}{r_{\psi}} \rightarrow \dot{\phi} = 0$
 $\therefore$ qdo $\theta = \theta'$ o pião pára instantaneamente de precessionar. Notando ainda que $V_{ef}'(\theta') = \frac{dV_{ef}}{du}(u = \frac{p_{\phi}}{r_{\psi}}) \cdot -\sin\theta' = -mgl\sin\theta' < 0$, então $\theta' \leq \theta_0$

Assim, há 3 sub-casos possíveis

- $\theta' < \theta_1 \rightarrow$ Nesse caso θ' nunca é atingido, e novamente o pião precessiona sem mudar de sentido
- $\theta' > \theta_1 \rightarrow$ Ao passar pelo valor $\theta = \theta'$ durante a nutação, a direção de precessão se inverte (2 vezes, uma na ida e outra na volta)
- $\theta' = \theta_1 \rightarrow$ Caso limite no qual a precessão pára no limite da nutação, depois continua no mesmo sentido



Exemplo 1 $\dot{\theta}(0) = \dot{\phi}(0) = \phi(0) = \psi(0) = 0$; $\dot{\psi}(0) = \omega_3$, $\theta(0) \neq 0$

(pião inicialmente inclinado e girando ao redor do próprio eixo)

$\rightarrow P_\phi = P_\psi \cos \theta_0 \leq P_\psi$ e $V_{\text{ef}}(\theta(0)) = E' \Rightarrow$ Caso ii(c), com $\theta(0) = \theta' = \theta_1$

Exemplo 2 $E' = V_{\text{ef}}(\theta_0)$ (mínimo do potencial). Nesse caso $\theta = \theta_0 = \text{cte}$ ($\dot{\theta} = 0$) ^{sem} _{nutação}

e ainda $\dot{\phi} = \text{cte} = \frac{\sigma}{I_1 \sin^2 \theta_0}$, onde $\sigma \equiv P_\phi - P_\psi \cos \theta_0$ (precessão c/ vel. const.)
ou "regular"

Para um dado θ_0 , há duas soluções possíveis para σ (i.e., duas velocidades de prec. regular)

Lembrando que $u_0 \equiv \cos \theta_0$ satisfaz

$$0 = V'_{\text{ef}}(u_0) = -P_\psi (P_\phi - u P_\psi) (1 - u^2) + (P_\phi - u P_\psi)^2 \cdot u + mgl I_1 (1 - u^2)^2$$

$$\therefore \sigma^2 u_0 - \sigma P_\psi S_0^2 + mgl I_1 S_0^4 = 0, \quad S_0^2 = 1 - u_0^2$$

então:

$$\sigma = \frac{S_0^2 [P_\psi \pm \sqrt{P_\psi^2 - 4mgl I_1 u_0}]}{2u_0} = \frac{I_3 \omega_3 \sin^2 \theta_0}{2 \cos \theta_0} \left[1 \pm \sqrt{1 - \underbrace{\frac{4mgl I_1 \cos \theta_0}{I_3^2 \omega_3^2}}_A} \right]$$

Para um pião rodando em uma superfície: $\theta_0 \leq \pi/2$ (se for pendurado pode ter $> \pi/2$)

Nesse caso $\cos \theta_0 > 0 \rightarrow \exists \omega_3$ mínimo para haver solução:

$$\omega_3 \geq \sqrt{\frac{4mgl I_1 \cos \theta_0}{I_3}}$$

Se $\omega_3 \gg \omega_{\text{min}}$:

$$\text{soluções } \dot{\phi}_\pm = \frac{\sigma_\pm}{I_1 \sin^2 \theta_0} \simeq \begin{cases} \frac{I_3 \omega_3}{I_1 \cos \theta_0} & (\text{aprox. } 1 - \varepsilon \sim 1) \\ \frac{I_3 \omega_3}{2 \cos \theta_0} \cdot \frac{2mgl \cos \theta_0}{I_3^2 \omega_3^2} = \frac{mgl}{I_3 \omega_3} & (\text{aprox } \sqrt{1 - \varepsilon} \approx 1 - \frac{1}{2} \varepsilon) \end{cases}$$

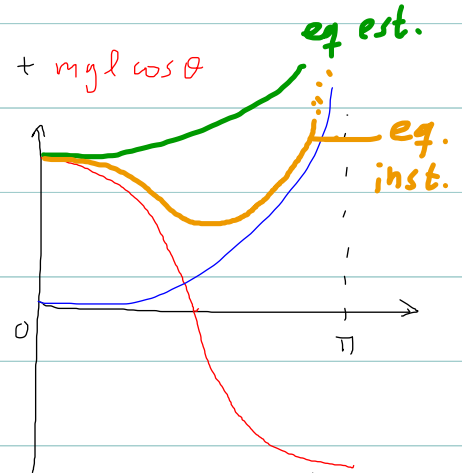
Exemplo 3: pião inicialmente vertical ("dorminte")

$$\theta(0)=0, \quad \dot{\phi}(0)=\omega_3 \rightarrow p_\phi = p_\psi = I_3 \omega_3$$

Semelhante ao ex. 1, mas como $p_\phi = p_\psi$ a análise anterior não se aplica. Agora

$$V_{ef}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{I_1} \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + mgl \cos\theta = \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{I_1} \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + mgl \cos\theta \quad \text{eq. est.}$$

$$\left(\text{usando } \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \cdot \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} \right)$$



A princípio, a condição $\dot{\theta}(0)=0$ implica $\theta(t) \equiv 0$

e $E' = V_{ef} = mgl$. Na prática, porém, temos de ver se este equilíbrio é estável

$$\text{Para } \theta \text{ pequeno: } V_{ef}(\theta) \approx \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{I_1} \frac{\theta^2}{4} + mgl(1 - \frac{\theta^2}{2}) = mgl + \frac{1}{2} \theta^2 \left[\frac{p_\psi^2}{4I_1} - mgl \right]$$

portanto: o pião é estável para pequenas perturbações ao redor de $\theta=0$ se

$$k > 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega_3 \geq \frac{2\sqrt{mgl I_1}}{I_3}} \equiv \omega_{\text{crítico}}$$

Na prática, a existência de um pequeno atrito entre o pião e a superfície leva ω_3 a ir diminuindo com o tempo. Enquanto $\omega_3 \geq \omega_c$, ele permanece praticamente ereto ou "dorminte", com pequenas oscilações ao redor de $\theta=0$. Porém, para $\omega_3 < \omega_c$, o pião se torna instável e "desperta", tombando p/ o lado.